Verfahrensbibliothek

Versuchsplanung und -auswertung

Band I

Buch mit Diskette

Herausgegeben von
Prof. Dr. D. Rasch, Prof. Dr. G. Herrendörfer,
Prof. Dr. J. Bock, Prof. Dr. N. Victor,
Dr. V. Guiard

R. Oldenbourg Verlag München Wien

(1996)

Autoren

Dr. H. Becher, Deutsches Krebsforschungszentrum Heidelberg, Abt. Biostatistik
Prof. Dr. J. Bock, F. Hoffmann La Roche AG Basel
Dr. M. Budde, F. Hoffmann La Roche AG Basel
Dr. H. U. Burger, F. Hoffmann La Roche AG Basel
Prof. Dr. K. Busch, Rostock, Lortzingstr. 11
Prof. Dr. T. Calinski, Landwirtschaftliche Hochschule Poznan, Inst. für Mathem. Statist.
Dipl.-Math. B. Dümke, Rostock, Friedrichstraße 41
Dr. L. Edler, Deutsches Krebsforschungszentrum Heidelberg, Abt. Biostatistik
Dr. G. Enderlein, Bundesanstalt für Arbeitsmedizin Berlin, Abt. Epidemiologie
Prof. Dr. H. Enke, Martin-Luther-Universität Halle, Institut für Biostatistik und Medizinische Informatik
Dr. K. Feige, Dummerstorf, Am Silo 9
drs. G. Gort, Wageningen Agricultural University, Dept. of Mathematics
Dr. V. Guiard, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. G. Herrendörfer, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. L. Hothorn, Universität Hannover, FB Gartenbau
Prof. Dr. J. Läuter, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, Institut für Biometrie und Medizinische Informatik
Dr. G. Nürnberg, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Dipl.-Math. E. Peter, BIORAT GmbH Rostock
Prof. Dr. B. van Putten, Wageningen Agricultural University, Dept. of Mathematics
Prof. Dr. D. Rasch, Wageningen Agricultural University, Dept. of Mathematics
Dr. Ch. Richter, Humboldt-Universität Berlin, Landw.-Gärtn. Fakultät
Dr. P. E. Rudolph, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Dipl.-Math. K. Schlettwein, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. J. S. Simonoff, New York University, Dept. of Statistics & Oper. Research
Dr. D. Sumpf, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. A. Stein, Wageningen Agricultural University, Dept. of Soil Science and Geology
Dr. F. Teuscher, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. E. Thomas, Humboldt-Universität Berlin, Landw.-Gärtn. Fakultät
Dr. R. Trommer, Eberswalde, Wildparkstraße 56
Dr. A. Tuchscherer, FBN Dummerstorf, FB Biometrie
Prof. Dr. L. R. Verdooren, Wageningen Agricultural University, Dept. of Mathematics
Prof. Dr. N. Victor, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, Institut für Medizinische Biometrie und Informatik, Abt. Medizinische Biometrie
Prof. Dr. M. P. Wand, University of New South Wales, Sydney, Australia
Dr. E. R. Williams, CSIRO Division of Forestry, Canberra, Australia

Technische Mitarbeiter

M. Bergfeld, R. Bunschkowski, H. Pichmann, FBN Dummerstorf
K. Witt, Rostock

$$n = \left\lceil \frac{1{,}645^2}{0{,}15^2\, 2\pi} \right\rceil = \lceil 19{,}14 \rceil = 20\,.$$

Für $\bar{z} = 2{,}4$ und $s = 4$ ergibt sich daraus wegen

$$\Phi(0{,}6) = 0{,}7257$$

$$\hat{p} = 0{,}7257$$

und das Konfidenzintervall $[0{,}5757;\, 0{,}8757]$.

Sequentielles Verfahren

Wir gehen sequentiell vor, und unter den ersten 9 Beobachtungen möge (7) nie erfüllt gewesen sein. Für $n = 10$ sei $\Sigma\, z = 17$ und $\Sigma\, z^2 = 178$. Damit erhält man $\bar{z} = 1{,}7 \quad s = 4{,}07$ und für die rechte Seite von (7)

$$\left\lceil \frac{t^2(9;0{,}95) \cdot \varphi^2(0{,}418)}{0{,}0225} \right\rceil = \left\lceil \frac{1{,}833^2 \cdot 0{,}3656^2}{0{,}0225} \right\rceil = 20\,,$$

so daß auch hier die Bedingung (7) noch nicht erfüllt ist. Die weiteren Ergebnisse findet man in folgender Übersicht:

n	x_n	y_n	$\bar{z}$	s	rechte Seite von (7)
11	12	16	1,909	3,923	19
12	13	20	2,333	4,019	17
13	11	19	2,769	4,156	15
14	12	16	2,857	4,007	14

Folglich wird der Versuch nach 14 Beobachtungen abgebrochen, da dann die Bedingung (7) erfüllt ist. Wir erhalten

$$\hat{p} = \Phi\left(\frac{2{,}857}{4{,}007}\right) = \Phi(0{,}713) = 0{,}762$$

und damit das Konfidenzintervall

$$[0{,}612;\, 0{,}912]\,.$$

Zweistufiges Verfahren

Wir wählen $n_0 = 10$, und es gelte für die Vorstichprobe $\bar{z} = 1{,}7 \quad s = 4{,}07$. Dann ist die rechte Seite von (7) gleich 20. Folglich sind 10 weitere Wertepaare zu beobachten. Die Berechnungen von $\hat{p}$ und des Konfidenzintervalles verlaufen analog.

3/11/2001 Nichtparametrische Schätzung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion ohne Voraussetzungen über deren Form

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer diskreten Verteilung mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion $P(\underline{y}_i = d_j) = p_j, \quad j = 1, \ldots, K$. Ohne etwas über die Form von P vorauszusetzen, sind die p_j zu schätzen.

Bemerkungen

1. Diese Schätzung entspricht der Maximum-Likelihood-Schätzung für Polynomialverteilungen. Sie ist erwartungstreu und effizient, wenn die n_j hinreichend groß ($\min_j n_j > 10$) sind.

2. Mehrdimensionale Verteilungen werden analog behandelt. Daten dieses Typs werden oft in Form von Kontingenztafeln erfaßt.

Lösungsweg

1. Ermittle die Anzahl n_j der Realisationen y_i, die den Wert d_j annehmen!

2. Schätze p_j durch

$$\hat{p}_j = \frac{n_j}{n},\ j = 1, \ldots, K, \text{ d.h. benutze}$$

die Schätzfunktion

$$\underline{\hat{p}}_j = \frac{\underline{n}_j}{n} \quad (j = 1, \ldots, K).$$

Literatur

Simonoff, J. S. (1995)

Beispiel

$\underline{y}$ bezeichne das Monatsgehalt von 147 Personen, eingeteilt in sechs Gehaltsklassen: 1 (\$950-\$1350), 2 (\$1351-\$1750), 3 (\$1751-\$2150), 4 (\$2151-\$2550), 5 (\$2551-\$2950) und 6 (\$2951-\$3750).

Liegt eine SAS-Datendatei `sas1` vor, welche in der Variablen mit dem Namen `Klasse` zu jeder Person die entsprechende Gehaltsklasse enthält, dann kann mit den folgenden SAS-Anweisungen

SAS-Programm

```
proc     freq    data=sas1;
  tables          Klasse;
run;
```

eine zur SAS-Ausgabe aus dem Verfahren **2/11/0001** analoge Häufigkeitstabelle erzeugt werden. Die Tabellenspalte `percent` enthält die Werte $100 \cdot \hat{p}_j$. Möglichkeiten zur graphischen Darstellung des Ergebnisses werden in **2/11/0002** demonstriert.

3/11/2002 Nichtparametrische Schätzung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion unter Glattheitsannahmen

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer diskreten Verteilung mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Werte aus $\{d_1, \ldots, d_K\}$ mit $P(\underline{y}_i = d_j) = p_j$, $j = 1, \ldots, K$, annehmen kann. Wir setzen eine "glatte" Wahrscheinlichkeitsfunktion voraus, indem wir annehmen, daß p_j für alle j nicht sehr von p_{j-1} und p_{j+1} abweicht. Diese Voraussetzung ist sinnvoll, wenn die Kategorien eine natürliche Ordnung haben. Wie schätzt man die p_j?

Bemerkungen

1. Streben die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion für die extremen Klassen nicht gegen Null, können nicht erwartungstreue Schätzungen auftreten. Man kann das korrigieren, indem man die Kernfunktion an den Rändern verändert, das sollte man aber nur bei zwingenden Gründen tun, da die Varianz der Schätzung zunimmt.

2. Die Überlegenheit der Kernschätzung gegenüber der Schätzung in **3/11/2001** ist vor allem bei kleinen Stichproben mit kategorialen Daten offensichtlich, d.h., wenn n von der Ordnung von K ist. Ist n relativ groß gegenüber K, so unterscheiden sich beide Methoden kaum.

3. Für $h \to 0$ unterscheidet sich die Kernschätzung kaum von der in **3/11/2001**.

4. Mehrdimensionale Probleme werden analog mit einem Produktkern behandelt.
Z.B. hat im zweidimensionalen Fall die Kernschätzung die Form

$$\hat{p}_{ij} = (Nh_x h_y)^{-1} \sum_{k,m} n_k n_m W\left(\frac{i-k}{h_x}\right) W\left(\frac{j-m}{h_y}\right) \quad ,$$

wobei h_x und h_y die Glättungsparameter für die Variablen sind, die zu den Indizes i bzw. j gehören.

Lösungsweg

1. Bestimme die Anzahl n_j der y_i die den Wert d_j annehmen.
2. Die Kernschätzung der Wahrscheinlichkeiten hat die Form

$$\hat{p}_j = (Nh)^{-1} \sum_{k=1}^{K} n_k W\left(\frac{j-k}{h}\right)$$

Da die Kernfunktion $W(\cdot)$ eine symmetrische Funktion ist, hat ihre spezielle Wahl wenig Einfluß auf die Eigenschaften der Schätzung. Man wähle entweder

$$W(t) = \begin{cases} \frac{15}{16}(1-t^2)^2, & \text{wenn } t \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

oder

$$W(t) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-t^2) & \text{wenn } t \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Glattheit der entstehenden geschätzten Wahrscheinlichkeitsfunktion hängt stark vom Glättungsparameter h ab - je größer h ist, desto besser ist die Glättung. Meist wird h so gewählt, daß die Funktion

$$CV(h) = \sum_{k=1}^{K} \hat{p}_k^2 - \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{K} n_k \hat{p}_k^{(k)},$$

minimiert wird, wobei $\hat{p}_k^{(k)}$ die Kernschätzung von p_k für den gleichen h-Wert und die gleichen n_j mit Ausnahme von n_k ist.

Literatur

Burman, P. (1987); Dong, J., Simonoff, J. S. (1994); Hall, P., Titterington, D. M. (1987); Simonoff, J. S. (1995);

Beispiel

Monatsgehälter von 147 Personen wurden in 12 Gruppen: 1 ($ 950-$1150), 2 ($ 1151-$1350), 3 ($ 1351-1550), 4 ($ 1551-$1750), 5 ($ 1751-1950), 6 ($ 1951-$2150), 7 ($ 2151-$2350), 8 ($ 2351-$2550), 9 ($ 2551-$2750), 10 ($ 2751-$2950), 11 ($ 2951-$3150) und 12 ($ 3151-$3750) eingeteilt (Simonoff, 1995). Abbildung 1 enthält die Häufigkeits- (nach **3/11/2001**) und Abbildung 2 die Kernschätzung für diese Daten.

Obwohl n (147) im Verhältnis zu K (12) nicht sehr klein ist, sind keine starken Unterschiede zwischen den Schätzmethoden zu erkennen. Trotzdem erscheint der glattere Kernschätzer, mit einem Gipfel bei Gruppe 5 (bei etwa $ 1850) und einem kleinen Gipfel in Gruppe 9, vernünftiger zu sein.

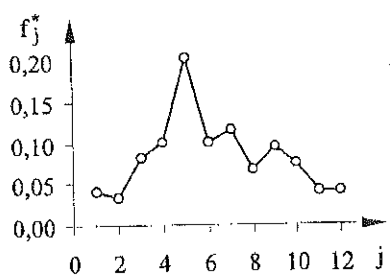

Abb. 1: Relative Klassenhäufigkeiten der Monatsgehälter

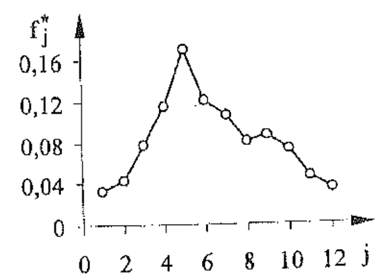

Abb. 2: Geglättete relative Klassenhäufigkeiten (Kernschätzung)

3/11/3001 Nichtparametrische Dichteschätzung - Histogrammschätzung

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer kontinuierlichen Verteilung mit der Dichtefunktion f. Wie kann man die Dichtefunktion f schätzen, wenn nichts über die Form von f vorausgesetzt wird?

Bemerkungen

1. Unter bestimmten Voraussetzungen über f und h strebt $\hat{f}(y)$ gegen $f(y)$ für $n \to \infty$.

2. Die Histogrammschätzung kann auf das Schätzen mehrdimensionaler Dichten verallgemeinert werden. Dazu müssen Unterteilungen auf jeder Achse vorgenommen werden. Es entstehen so Rechtecke bzw. Quader im R^n als Klassen.

Lösungsweg

1. Man zerlege einen relevanten Teil der Zahlengerade, der alle Realisationen $y_1, \ldots, y_n$ enthält, in die Teilintervalle

$$B_j = (a_{j-1}; a_j), \qquad j = 1, 2, \ldots ,$$

wobei $a_{j+1} - a_j = h$ für alle j ist. Wir nennen die B_j Klassen, h die Klassenbreite und die a_j die Klassengrenzen.

2. Die Histogrammschätzung $f(y)$ ist durch

$$\hat{f}(y) = \frac{\text{Anzahl der } y_i \text{ in } B_j}{nh}, \text{ für } y \in B_j$$

gegeben.

Die Werte von $\hat{f}(y)$ hängen stark von der Wahl von a_0 und von h ab, diese Parameter sollten durch Probieren geeignet gewählt werden. Dabei sollte h nicht größer als $(b-a)/(2n)^{1/3}$ sein, wobei (a, b) das kleinste Intervall ist, das die y_i enthält. Einige praktische Hinweise zur Wahl von a_0 und h findet man im Verfahren **2/11/0003**. Die zu den einzelnen Klassen gehörenden $f(y)$-Werte können mit Hilfe einer Häufigkeitstabelle gemäß **2/11/0001** berechnet werden. Möglichkeiten zur Darstellung des Histogramms werden in **2/11/0002** demonstriert.

Literatur

Scott, D. W. (1992)

3/11/3002 Nichtparametrische Dichteschätzung - Kernschätzung

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer kontinuierlichen Verteilung mit der Dichtefunktion f. Wie kann man die Dichtefunktion f schätzen, wenn nichts über die Form von f vorausgesetzt wird?

Bemerkungen

Wenn $\hat{f}(y)$ für $n \to \infty$ gegen $f(y)$ konvergiert, geschicht dies schneller als bei der Histogrammschätzung.
Man kann die Kernschätzung verallgemeinern, um mehrdimensionale Dichten zu schätzen. Ist z.B. $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Stichprobe aus einer mehrdimensionalen Verteilung, so ist

$$\hat{f}(\underline{y}) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \Phi_H\left(\underline{y} - \underline{y}_i\right), \tag{1}$$

wobei Φ_H die Dichte einer mehrdimensionalen Normalverteilung mit Mittelwertvektor Null und Kovarianzmatrix H ist. Die Matrix H ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Bandbreite.
Die Kerndichteschätzung ist auch mit der INSIGHT SAS-Software realisierbar.

Lösungsweg

Die Kernschätzung von $f(y)$ ist

$$\hat{f}(y) = (nh)^{-1} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y - y_i}{h}\right).$$

Die Kernfunktion K ist gewöhnlich eine symmetrische Dichtefunktion, ihre Wahl beeinflußt die Schätzung kaum. Gewöhnlich wählt man die Dichte der $N(0;1)$-Verteilung als Kernfunktion, d.h.,

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}. \tag{2}$$

Der Wert von $\hat{f}(y)$ hängt stark von der Bandbreite $h > 0$ ab.
Eine relativ zuverlässige Wahl von h erfolgt durch

$$\hat{h} = b_1 \left[\frac{a}{\kappa_2^2 n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K^{(4)}\left\{(y_i - y_j)/b_1\right\}} \right]^{1/5} \tag{3}$$

mit

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)^2 dt, \qquad \kappa_2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t) dt,$$

$$b_1 = b_2 \left[\frac{-2K^{(4)}(0)}{\kappa_2 n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K^{(6)} \left\{ (y_i - y_j) / b_2 \right\}} \right]^{1/7}, \tag{4}$$

$$b_2 = \left[-64\pi^{1/2} K^{(6)}(0) / \left\{ 105 \kappa_2 n \right\} \right]^{1/9} \hat{\sigma}, \tag{5}$$

$\hat{\sigma} = \min\{s, (\text{Quartilabstand})/1{,}349\}$ (vergleiche **2/41/0001**)

und s die Stichprobenstandardabweichung. $K^{(r)}(t)$ bezeichnet die r-te Ableitung von K(t) nach t und $K^{(r)}(0)$ den Wert dieser Ableitung für $t = 0$. Wird für K(t) der Kern (2) verwendet, so vereinfachen sich die Formeln (3) bis (5), da dann $a = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, $\kappa_2 = 1$, $K^{(4)}(t) = (t^4 - 6t^2 + 3)K(t)$ und $K^{(6)}(t) = (t^6 - 15t^4 + 45t^2 - 15)K(t)$ wird.

Literatur

Akaike, H. (1954); Fix, E., Hodges, J. L. (1951); Parzen, E. (1962); Rosenblatt, M. (1956); Sheather, S. J., Jones, M. C. (1991); Silverman, B. W., Jones, M. C. (1989); Wand, M. P., Jones, M. C. (1995)

Beispiel

Von 40 Hypothekenbanken und von 29 gewöhnlichen Banken von Long Island sind die Zinssätze gegeben (Newsday, 23. August, 1969).

Hypothekenbanken: 7,51; 7,75; 7,90; 8,00; 8,00; 8,00; 8,15; 8,25; 8,25; 8,20;
8,33; 8,30; 8,35; 8,36; 8,34; 8,30; 8,35; 8,40; 8,40; 8,40;
8,40; 8,40; 8,40; 8,49; 8,49; 8,49; 8,45; 8,50; 8,50; 8,50;
8,52; 8,50; 8,50; 8,50; 8,50; 8,50; 8,50; 8,75; 8,78; 8,70

andere Banken: 7,57; 7,56; 7,71; 7,82; 7,82; 7,90; 8,05; 8,00; 8,05; 8,00;
8,00; 8,00; 8,06; 8,00; 8,00; 8,00; 8,11; 8,17; 8,33; 8,33;
8,30; 8,40; 8,57; 8,50; 8,55; 8,51; 8,65; 8,65; 8,71

Die geschätzten Dichten für beide Banktypen findet man in Abbildung 1. Als Kern wurde die Dichte der $N(0;1)$-Verteilung benutzt, als Bandbreite wurde $h = 0{,}059$ (Hypothekenbanken) bzw. $h = 0{,}12$ (gewöhnliche Banken) verwendet, die beide durch Anwendung der oben beschriebenen Regeln bestimmt wurden. Beide Schätzungen zeigen die Bevorzugung "runder" Zinssätze (7,5%, 8%, 8,5%) und die Unterschiede zwischen beiden Arten von Banken. Ein etwas größerer h-Wert könnte eine größere Glättung erreichen lassen.

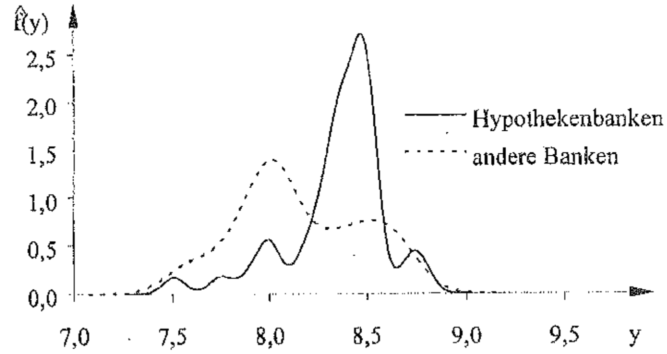

Abb. 1: Kernschätzung der Dichten der Verteilungen der Zinssätze der beiden Gruppen von Banken

3/11/3003 Nichtparametrische Dichteschätzung (modifizierte Kernschätzung)

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer kontinuierlichen Verteilung mit der Dichtefunktion f. Wie kann man die Dichtefunktion f schätzen, wenn nichts über die Form von f vorausgesetzt wird?

Bemerkungen

Diese Modifikationen der gewöhnlichen Kernschätzung werden dadurch begründet, daß für unterschiedliche Krümmungen unterschiedliche Bandbreiten günstig sind.

Lösungsweg

1. Man kann die Kerndichteschätzung (siehe **3/11/3002**) modifizieren, indem man die Bandbreite h nicht im ganzen Schätzbereich konstant hält.

(a) Als variable Kerndichteschätzung verwende man

$$\hat{f}(y) = n^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\alpha(y_i)} K\left(\frac{y - y_i}{\alpha(y_i)}\right),$$

wobei K in **3/11/3002** definiert ist, und $\alpha(y_i)$ eine Funktion von y_i ist. Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Funktion $\alpha(\cdot)$ zu wählen. Z.B. $\alpha(u) = h\tilde{f}(u)^{-1/2}$, wobei $\tilde{f}(u)$ eine gewöhnliche Kerndichteschätzung und $h > 0$ die Bandbreite ist. Allerdings sollte $\tilde{f}$ nicht zu nahe bei Null liegen. Die Wahl der Bandbreite h ist ein schwieriges Problem, für das es keine allgemeine Lösung gibt.

(b) Als lokale Kerndichteschätzung verwende man:

$$\hat{f}(y) = \{nh(y)\}^{-1} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{y - y_i}{h(y)}\right),$$

wobei $h(y)$ eine Funktion von y ist. Die Wahl der Funktion $h(\cdot)$ ist ein schwieriges Problem, für das es keine allgemeine Lösung gibt.

2. Oft ist es sinnvoll, die Daten zu transformieren, die Dichte in der anderen Skala zu schätzen und dann zurückzutransformieren. Z.B. sind Verteilungen mit breiter Spannweite und relativ großer Dichte an den Rändern schwer zu schätzen. Durch eine logarithmische Transformation kann man bessere Schätzungen erhalten. Es sei $z = g(y)$ eine monotone Transformation der Daten. Dann hat die auf dieser Transformation basierende Schätzung die Form

$$\hat{f}(y) = \frac{g'(y)}{nh_Z} \sum_{i=1}^{n} K\left[\frac{g(y) - g(y_i)}{h_Z}\right],$$

wobei h_Z in der transformierten z-Skala zu bestimmen ist.

Literatur

Abramson, I. S. (1982); Breiman, L., Meisel, W., Purcell, E. (1977); Dawkins, B. (1989); Devroye, L., Györfi, L. (1985); Jones, M. C., McKay, I. J., Hu, T. C. (1994); Wand, M. P., Marron, J. S., Ruppert, D. (1991)

Beispiel

Abb. 1 zeigt die Kernschätzung mit fester und variabler Bandbreite von Rekordzeiten (männlich) im Marathonlauf (Quelle: Dawkins, B. (1989)). Beide Schätzungen verwenden einen normalen Kern. Als feste Bandbreite wurde $h = 1{,}435$ und als Variable $\alpha(y_i) = 0{,}466 \times \hat{f}(y_i)^{-1/2}$ gewählt. Beide Schätzungen haben einen Modalwert bei 132 Minuten (2 Stunden, 12 Minuten) und zeigen eine interessante Struktur bei 135 Minuten und 150 Minuten ($2\frac{1}{4}$ bis $2\frac{1}{2}$ Stunden), die möglicherweise psychologische Barrieren bei diesen Werten reflektieren.

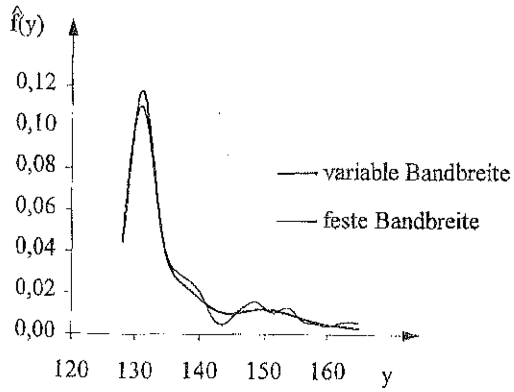

Abb. 1: Kernschätzung mit festen und variablen Bandbreiten

3/11/3004 Nichtparametrische Dichteschätzung (lokale polynomiale Kernschätzung)

Problemstellung

Es sei $\underline{y}_1, \ldots, \underline{y}_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer kontinuierlichen Verteilung mit der Dichtefunktion f. Wie kann man die Dichtefunktion f schätzen, wenn nichts über die Form von f vorausgesetzt wird?

Bemerkungen

1. Unter bestimmten Voraussetzungen über f, K und h kann man zeigen, daß $\hat{f}_p(y)$ für $n \to \infty$ gegen $f(y)$ konvergiert. Die Konvergenzgeschwindigkeit hängt von der Ordnung p des Polynoms ab.

2. Der lokale lineare Kernschätzer $(p = 1)$ ähnelt dem von **3/11/3002**, hat aber oft bessere Eigenschaften an den Rändern.

Lösungsweg

Die lokal polynomiale Kernschätzung p-ten Grades von $f(y)$ ist:

$$\hat{f}_p(y) = b_0,$$

wobei $(b_0, \ldots, b_p)$ der Wert des Vektors $(\beta_0, \ldots, \beta_p)$ ist, der

$$\int K\left(\frac{y-u}{h}\right)\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\delta(u-y_i)-\beta_0-\beta_1(u-y)-\ldots-\beta_p(u-y)^p\right]^2 du$$

minimiert. Hier ist $\delta(t) = 1$ für $t = 0$ und 0 sonst.

(a) Die Kernfunktion K ist gewöhnlich eine symmetrische Dichtefunktion. Ihre spezielle Wahl hat wenig Einfluß auf das Ergebnis. Oft wählt man für K die Dichte der $N(0;1)$-Verteilung

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \ .$$

(b) p muß durch den Nutzer festgelegt werden. Gewöhnlich verwendet man $p = 1$ (lokale lineare Kernschätzung) und $p = 3$ (lokale Kernschätzung 3. Grades), da ungerade p theoretische Vorteile haben (Erwartungstreue).

(c) Der Wert von $\hat{f}(y)$ hängt stark von der Bandbreite $h > 0$ ab.
Es sollten mehrere Bandbreiten entsprechend den in **3/11/3002** beschriebenen Regeln ausprobiert werden, vor allem für lineare Schätzungen.

Literatur

Cleveland, W. S. (1979); Hastie, T., Loader, C. (1993); Jones, M. C. (1993); Lejeune, M., Sarda, P. (1992); Maguire, B. A., Pearson, E. S., Wynn, A. H. A. (1952); Sarda, P. (1991); Stone, C. J. (1977)

Beispiel

Abbildung 1 zeigt den lokal-linearen Kernschätzer angewandt auf Daten über Bergwerksunglücke, die die Anzahl der Tage zwischen solchen Ereignissen in Division 5 der Great Britain National Coal Board über 245 Tage im Jahr 1950 enthalten (Maguire, Pearson und Wynn, 1952).

Die der Größe nach geordneten Werte sind:
0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 9, 9, 13, 14, 14, 15, 17, 20, 21, 24, 24, 44.
Wir verwenden die Standardnormaldichte als Kern und als Bandbreite $h = 3,3$, wie in dem Lösungsweg von **3/11/3002** beschrieben. Folglich sind b_0 und b_1 die Werte von β_0 und β_1, die

$$\int \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-u)^2}{2 \cdot 3{,}3^2}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta(u-y_i) - \beta_0 - \beta_1 (u-y) \right]^2 du$$

minimieren. Zum Vergleich ist auch die gewöhnliche Dichteschätzung abgebildet. Letztere hat einen Modalwert bei 3 Tagen, obwohl etwa 36% der Werte im Intervall $(0,3)$ liegen.

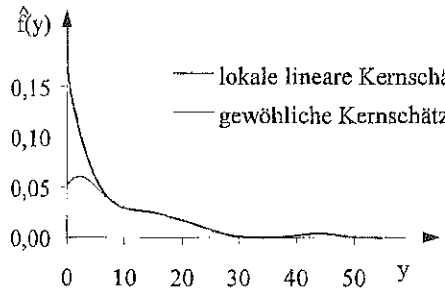

Abb. 1: Vergleich der lokal-linearen mit der gewöhnlichen Kernschätzung

7. Literaturverzeichnis

Abramson, I. S. (1982): On Bandwith Variation in Kernel Estimates - a Square Root Law. Ann. Statist., 9, 168 - 176

Agresti, A. (1984): Analysis of Ordinal Categorical Data. (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), John Wiley & Sons, New York, 287 p.

Ahrens, H., Läuter, J. (1974): Mehrdimensionale Varianzanalyse. Akademie-Verlag Berlin

Akaike, H. (1954): An Approximation to the Density Function. Ann. Inst. Statist. Math., 6, 127 - 132

Anderson, T. W. (1960): A Modification of the Sequential Probability Ratio Test to Reduce the Sample Size. Ann. Math. Statist., 3, 165 - 197

Andrews, D. F., Bickel, P. J., Hampel, F. R., Huber, P. J., Rogers, W. H., Tukey, J. W. (1972): Robust Estimates of Location: Survey and Advances. Princeton University Press, Princeton, N. J.

Bailey, R. A. (1987): One-Way Blocks in Two-Way Layouts. Biometrika, 74, 27 - 32

Bailey, S. (1992): Calculating the Jonckheere-Terpstra Test Statistic Using the SAS System under VMS, SAS Proceedings 1992, 1327 - 1330

Bandemer, H., Bellmann, A., Jung, W., Richter, K. (1973): Optimale Versuchsplanung. Akademie-Verlag Berlin

Barnett, V., Lewis, T. (1984): Outliers in Statistical Data. John Wiley & Sons, New York, 2nd ed.

Barraclough, E. D., Page, E. S. (1959): Tables for Wald Tests for the Mean of a Normal Distribution. Biometrika, 46, 169 - 177

Bauer, P. (1991): Multiple Testing in Clinical Trials. Statistics in Medicine, 10, 871 - 890

Bechhofer, R. E. (1954): A Single Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with Known Variances. Ann. Math. Statist. 25, 16 - 39

Bechhofer, R. E., Blumenthal, S. (1962): A Sequential Multiple-Decision Procedure for Selecting the Best One of Several Normal Populations with a Common Unknown Variance. II.: Monte Carlo Sampling Results and New Computing Formulae. Biometrics 18, 52 - 67

Bechhofer, R. E., Dunnett, Ch. W., Sobel, M. (1954): A Two-Sample Multiple Decision Procedure for Ranking Means of Normal Populations with a Common Unknown Variance. Biometrika, 41, 170 - 176

Billard, L. (1972): Properties of Some Two-Sided Sequential Tests for the Normal Distribution. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 34, 417 - 426

Bock, J. (1974): Planung des Stichprobenumfanges beim Newman-Keuls-Test. Biometr. Z., 16, 417 - 422

Bock, J., Herrendörfer, G. (1976): Zur Verwendung des Bestimmtheitsmaßes in der Regressionsanalyse Modell I. Biometr. Z., 18, 251 - 257

Bofinger, E. (1984): Δ-Correct Decision for Location and Scale Parameters. Commun. Statist.-Theory Meth., 13, 3117 - 3121

Bolschev, L. N. (1963): Asimtotitscheskie Pirsonovskie Preobrazovanija. Teorija Verojat. i ee Primenenija 8, 129 - 155

Bolschev, L. N., Smirnov, N. V. (1968): Tablicy Matematitscheskoj Statistiki. Vytschislitelnyj Centr. AN SSR, Moskau

Bose, R. C., Clatworthy, W. H., Shrikhande, S. S. (1954): Tables of Partially Balanced Designs with Two Associate Classes. (Technical Bulletin. North Carolina Agricultural Exp. Station; No. 107), Chapel Hill, 255 p.

Box, G. E. P., Hunter, J. S. (1961): The 2^{k-p} Fractional Factorial Designs. Technometrics, 3, 311 - 352 (Part 1), 449 - 458 (Part 2)

Box, G. E. P., Jenkins, G. M. (1976): Time Series Analysis Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco

Bradu, P., Mundlak, Y. (1970): Estimation in Lognormal Linear Models, Theory and Methods. J. Amer. Statist. Assn. 65, 198 - 211

Breiman, L., Meisel, W., Purcell, E. (1977): Variable Kernel Estimates of Multivariate Densities. Technometrics, 19, 135 - 144

Brewer, K. R. W., Hanif, M. (1983): Sampling with Unequal Probabilities. Lecture Notes in Statistics, Vol. 15. Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin

Brownlee, K. A. (1967): Statistical Theory and Methodology in Science and Engineering. Wiley, New York, 2nd ed., 110 - 111, 140 - 146

Burman, P. (1987): Smoothing Sparse Contingency Tables. Sankhya A, 49, 24 - 36

Calinski, T. (1971): On Some Desirable Patterns in Block Designs. Biometrics, 27, 275 - 292

Calinski, T., Ceranka, B. (1974): Supplemented Block Designs. Biometr. Z., 16, 299 - 305

Ceranka, B. (1975): Doswidczalne Uklady Blokowe z Dwiema Cliczbami Replikacji. Listy Biometryczne, 15 - 32, 46 - 48

Chen, J. (1992): Some Results on 2^{n-k} Fractional Factorial Designs and Search for Minimum Aberration Designs. Ann. Math. Statist., 20, 2124 - 2141

Chiu, W. K. (1974): Selecting the m Populations with Largest Means from k Normal Populations with Unknown Variances. The Austral. J. Statist., 16, 144 - 147

Clatworthy, W. H. (1956): Contributions on Partially Balanced Incomplete Block Designs with Two Associate Classes. Nat. Bur. Stand. Appl. Math. Ser. No 47

Clatworthy, W. H., Bose, R. C., Shrikhande, S. S. (1973): Tables of Two-Associate-Class Partially Balanced Designs. (Appl. Math. Ser. National Bureau of Standards. U. S. Department of Commerce; No. 63), Washington, 314 p.

Claus, G., Ebner, H. (1970): Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. Verlag Volk u. Wissen, Berlin

Cochran, W. G. (1977): Sampling Techniques. John Wiley & Sons, Inc., New York (3rd ed.)

Cochran, W. G., Cox, G. M. (1957): Experimental Designs. J. Wiley & Sons, New York 2nd ed.

Cohen, A. C. (1957): On the Solution of Estimating Equations for Truncated and Censored Samples from Normal Populations. Biometrika 44, 225 - 236

Cohen, A. C. (1959): Simplified Estimators for the Normal Distribution when Samples are Singly Censored or Truncated. Technometrics, 1, 217 - 237

Corsten, L. C. A. (1962): Balanced Block Designs with Two Different Numbers of Replicates. Biometrics, 18, 499 - 519

Cox, D. R. (1992): Planning of Experiments. J. Wiley & Sons, New York

Cramer, H. (1946): Mathematical Methods of Statistics. Princeton

Crow, E. L., Gardner, R. S. (1959): Confidence Intervals for the Expectation of a Poisson Variable. Biometrika, 46, 441 - 453

D'Agostino, R. B. (1971): An Omnibus Test of Normality for Moderate and Large Size Samples. Biometrika, 58, 341 - 348

D'Agostino, R. B. (1972): Small Sample Probability Points for the D Test of Normality. Biometrika, 59, 219 - 221

Dahiya, R. C., Gurland, J. (1972): Pearson Chi-Squared Test of Fit with Random Intervals. Biometrika, 59, 147 - 153

Dahiya, R. C., Gurland, J. (1973): How Many Classes in the Pearson Chi-Square Test? J. Amer. Statist. Assn., 68, 707 - 712

Das Gupta, P. (1968): Tables of the Non-Centrality Parameter of the F-Test as a Function of Power. Sankhya B, 30, 73 - 82

Dawkins, B. (1989): Multivariate Analysis of National Track Records. Amer. Statist., 43, 110 - 115

Deely, J. J., Gupta, S. S. (1968): On the Properties of Subset Selection Procedures. Sankhya A, 30, 37 - 50

Desu, M. M., Sobel, M. (1968): A Fixed Subset Approach to the Selection Problem. Biometrika, 55, 401 - 410

Devroye, L., Györfi, L. (1985): Nonparametric Density Estimation: the L_1 View. J. Wiley & Sons, New York

Dong, J., Simonoff, J. S. (1994): The Construction and Properties of Boundary Kernels for Sparse Multinomials. J. Comput. and Graph. Statist., 3, 57 - 66

Dudewicz, E. J., Dalal, S. R. (1975): Allocation of Observations in Ranking and Selection with Unequal Variances. Sankhya B, 37, 28 - 78

Dudewicz, E. J., Ramberg, J. S. (1972): Multiple Comparisons with a Control: Unknown Variances. Ann. Techn. Conf. Transact. of the Amer. Soc. for Quality Contr., 26, 483 - 488

Dunnett, C. W. (1955): A Multiple Comparison Procedure for Comparing Several Treatments with a Control. J. Amer. Statist. Assn., 50, 1096 - 1121

Dunnett, C. W. (1964): New Tables for Multiple Comparisons with a Control. Biometrics, 20, 482 - 491

Eberhardt, L. L. (1968): A Preliminary Appraisal of Line Transects. J. of Wildlife Management, 32, 81 - 88

Eberhardt, L. L. (1978): Transect Methods for Population Studies. J. of Wildlife Management, 42, 1 - 31

Eisenhart, C., Hastay, M. W., Wallis, W. A. (1947): Techniques of Statistical Analysis. McGraw Hill, New York - Toronto - London

Enderlein, G. (1974): Balancierte Periodenversuchspläne. Biometr. Z., 16, 491 - 503

Enderlein, G. (1992): Überkreuzversuche in klinischen Studien zu reversiblen Behandlungen (Crossover designs). In: Adam, J. (Hrsg.): Statistisches Know-How in der medizinischen Forschung. Ullstein Mosby, Berlin, S. 210 - 228

EU-CPMP (1990): Good Clinical Practice for Trials on Medicinal Products in the European Community. Luxemburg

Evans, M., Hastings, N., Peacock, B. (1993): Statistical Distributions. J. Wiley & Sons, New York, 2nd ed., 170 p.

Everitt, B. S. (1992): The Analysis of Contingency Tables. Second Edition. Chapman & Hall, London

Exner, H. (1976): Sequentielle Entscheidungsverfahren für den unbekannten Erwartungswert der Normalverteilung. Math. Operationsforsch. u. Statist., 7, 775 - 787

Federer, W. T., Atkinson, G. F. (1964): Tied-Double Change-Over Designs. Biometrics, 20, 168 - 181

Fisher, R. A. (1966): The Design of Experiments. Oliver and Boyd, Edinburgh-London, 8th ed.

Fix, E., Hodges, J. L. Jr. (1951): Nonparametric Discrimination: Consistency Properties. Report Number 4, USAF School of Aviation Medicine, Randolph Field, Texas

Flehinger, B. J., Louis, T. A. (1971): Sequential Treatment Allocation in Clinical Trials. Biometrika, 58, 419 - 426

Franklin, M. F., Bailey, R. A. (1977): Selection of Defining Contrasts and Confounded Effects in Two-Level Experiments. Appl. Stat. J. Roy. Stat. Soc., C, 26, 321 - 326

Fries, A., Hunter, W. G. (1980): Minimum Aberration 2^{k-p} Designs. Technometrics, 22, 601 - 608

Gates, C. E., Marshall, W. M., Olson, P. (1968): Line Transect Method of Estimating Densities. Biometrics, 24, 135 - 145

Ghosh, B. K. (1970): Sequential Tests of Statistical Hypotheses. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Ghosh, B. K., Sen, P. K. (1991): Handbook of Sequential Analysis. Marcel Dekker, Inc., New York - Basel - Hong Kong

Giani, G. (1987): Fixed Size Subset Selection Regarding the Indifference Zone and Preferred Component Formulation. Statistics & Decisions, 5, 15 - 31

Gilde, W., Altrichter, S. (1968): Die optimale Lösung. Urania-Verlag, Leipzig - Jena - Berlin, 30 - 36

Gendenko, B. W., Beljajew, J. K., Solowjew, A. D. (1968): Mathematische Methoden der Zuverlässigkeitstheorie. Band I u. II. Akademie-Verl., Berlin

Göttsche, Th. (1990): Einführung in das SAS-System für den PC. Gustav Fischer, Stuttgart, New York

Goodman, L. A., Kruskal, W. H. (1954): Measures of Association for Cross Classifications. J. Amer. Statist. Assn., 733 - 764

Govindaraluju, Z. (1974): Fixed-width Confidence Intervals for $P(X<Y)$. Aus: Reability and Biometry. F. Proschan and R. J. Serfling (edit.), Pennsylvania, 747 - 756

Graybill, F. A. (1961): An Introduction to Linear Statistical Models. Vol.I, McGraw-Hill, New York

Grimm, H. (1960): Transformation von Zufallsvariablen. Biometr. Z., 2, 164 - 182

Groeneveld E. (1995): REML VCE a Multivariate Multi Model Restricted Maximum Likelihood (Co) Variance Component Estimation Package, Version 3.1 User's Guide. Institute of Animal Husbandry and Animal Behaviour, Federal Research Center of Agriculture (FAL), Mariensee, Germany

Grubbs, F. E. (1950): Sample Criteria for Testing Outlying Observations. Ann. Statist., 21, 27 - 58

Guiard, V. (1995): Different Definitions of Δ-correct Selection for the Indifference Zone Formulation. J. Statist. Planning and Inference. Special Issue Miescke, K. and Rasch, D. (Eds.) "40 Years of Statistical Selection Theory", in press

Gupta, S. S. (1963): Probability Integrals of Multivariate t. Ann. Math. Statist., 34, 792 - 828

Gupta, S. S. (1965): On Some Multiple Decision (Selection and Ranking) Rules. Technometrics, 7, 225 - 245

Gupta, S. S., Panchapakesan, S. (1979): Multiple Decision Procedures: Theory and Methodology of Selecting and Ranking Populations. John Wiley & Sons, New York

Gutjahr, W. (1971): Die Messung psychischer Eigenschaften. Dt. Verl. d. Wiss., Berlin

Guttman, I. (1970): Statistical Tolerance Regions: Classical and Bayesian. Griffin's Statist. Monogr. & Courses, London

Hájek, J., Šidák, Z. (1967): Theory of Rank Tests. Academic Press, New York

Hall, P., Titterington, D. M. (1987): On Smoothing Sparse Multinomial Data. Australian J. Statist., 29, 19 - 37

Harman, A. J. (1967): Wilk's Tolerance Limit Sample Sizes. Sankhya Ser. A, 29, 215 - 218

Harter, L. (1957): Error Rates and Sample Sizes for Range Tests in Multiple Comparisons. Biometrics, 13, 511 - 536

Harter, H. L., Clemm, D. S., Guthrie, E. H. (1959): Probability Integral and Percentage Points of the Studentized Range. Critical Values for Duncan's New Multiple Range Test WADC Technical Report 58 - 484, Vol. II Ohio, 244-281

Hartung, J. (1993): Statistik - Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. 9. Aufl., Oldenbourg Verlag, München - Wien

Hawkins, D. M. (1980): Identification of Outliers. Chapman & Hall, London

Herrendörfer, G. (1977): The Design and Analysis of Experiments if Measurements are Taken in Groups. Biometr. Z., 19, 107 - 115

Herrendörfer, G., Rasch, D. (1977): Complete Block Designs. II Analysis of Partially Balanced Designs. Biom. J., 19, 455 - 461

Herrendörfer, G., Schmidt, J. (1978): Estimation and Test for the Mean in a Model II of Analysis of Variance. Biom. J., 20, 355 - 361

Herrmann, R., Kern, B.-R., zum Winkel, K., Victor, N., Laufs, A. (1984): Empfehlungen zur Randomisation und Aufklärung bei Therapiestudien in der Onkologie. In: zum Winkel, K. et al.: Randomisation und Aufklärung bei klinischen Studien in der Onkologie. Springer-Verlag Heidelberg, 51 - 55

Heuts, R. M. J., Rens, P. J. (1973): A Monte Carlo Study of the Kuiper Test Statistic for Testing Exponentiality (Two Different Approaches). Paper Presented at the Symposium "Computer Simulation Versus Analytical Solutions for Business and Economic Models", Gothenburg, Sweden

Hinkelmann, K., Kempthorne, O. (1994): Design and Analysis of Experiments. J. Wiley & Sons, New York

Hochberg, Y., Tamhane, A. C. (1987): Multiple Comparison Procedures. J. Wiley & Sons, New York, 450 p.

Hollander, M., Wolfe, D. A. (1973): Nonparametric Statistical Methods. J. Wiley & Sons, New York

Huber, P. J. (1981): Robust Statistics. John Wiley & Sons, New York

Jain, R. B. (1981): Percentage Points of Many-Outlier Detection Procedures. Technometrics, 23, 71 - 76

Jílek, M., Likař, O. (1959): Coefficients for the Determination of One-Sided Tolerance Limits of Normal Distribution. Ann. Inst. Math., Tokio, 11, 45 - 48

John, J. A., Williams, E. R. (1995): Cyclic and Computer Generated Designs. Chapman and Hall, London

Johnson, N. L., Kotz, S. (1972): Distributions in Statistics: Continuous Multivariate Distributions. J. Wiley & Sons, Inc.: New York

Johnson, N. L., Kotz, S., Kemp, A. W. (1992): Unvariate Discrete Distributions. J. Wiley & Sons, Inc.: New York, 2nd ed., 565 pp.

Jones, B., Kenward, M. G. (1989): Design and Analysis of Cross-Over Trials. Chapman and Hall, London

Jones, M. C., McKay, I. J., Hu, T.-C. (1994): Variable Location and Scale Density Estimation. Ann. Inst. Statist. Math., 46, 521 - 535

Kalbfleisch, J. G., Sprott, D. A. (1973): The Comparisons of Poisson-Distributed Observations. Biometrics, 29, 223 - 224

Kastenbaum, M. A., Hoel, D. G., Bowman, K. O. (1970): Sample Size Requirements for One-Way Analysis of Variance. Biometrika, 57, 421 - 430

Kendall, M. G., Stuart, A. (1963), (1966), (1967): The Advanced Theory of Statistics. 3 Bde., Griffin, London

Keuls, M. (1952): The Use of Studentized Range in Connection with Analysis of Variance. Euphytica, 1, 112 - 122

Kogure, A. (1987): Asymptotically Optimal Cells for a Histogram. Ann. Statist., 15, 1023 - 1030

Kolmogorov, A. N. (1933): Sulla Determinazione Empirico di Una Legge di Distribuzione. Giorn. Inst. Ital. Attuari, 4, 83 - 91

Krishnaiah, P. R., Kanal, L. N. (1982): Classification, Pattern Recognition and Reduction of Dimensionality. Handbook of Statistics Vol. 2, North Holland, Amsterdam - London - New York - Tokyo, xxii + 903 pp.

Krishnaiah, P.R., Rao, C. R. (1988): Sampling. Handbook of Statistics 6, Elsevier Science Publ., Amsterdam

Kruskal, W. H. (1952): A Nonparametric Test for the Several Sample Problem. Ann. Math. Statist., 23, 525 - 540

Kruskal, W. H., Wallis, W. A. (1952): Use of Ranks in One-Criterion Analysis of Variance. J. Amer. Statist. Assn., 47, 583 - 621; errata, ibid. (1953), 48, 905 - 911

Kumar, S., Patel, H. J. (1971): A Test for the Comparison of Two Exponential Distributions. Technometrics, 13, 183 - 189

van der Laan, P (1995): J. Statist. Planning and Inference. Special Issue Miescke, K. and Rasch, D. (Eds.) "40 Years of Statistical Selection Theory", in press

Läuter, J. (1992): Stabile multivariate Verfahren - Diskriminanzanalyse, Regressionsanalyse, Faktoranalyse. Akademie Verlag, Berlin

Lebart, L., Morineau, A., Fénelon, J.-P. (1984): Statistische Datenanalyse. Akademie-Verlag, Berlin

Lehmann, E. L. (1983): Theory of Point Estimation. John Wiley & Sons, New York

Lillifors, H. W. (1967): On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. J. Amer. Statist. Assn., 62, 399 - 402

Lin, F. O., Haseman, J. K. (1976): A Modified Jonkheere Test against Ordered Alternatives when Ties are Present at a Single Extreme Value. Biometr. Z., 18, 623 - 631

Linder, A. (1959): Planen und Auswerten von Versuchen. Birkhäuser, Basel-Stuttgart, 2. Aufl.

Liu, W. (1995): Fixed-Width Simultaneous Confidence Intervals for all-pairwise Comparisons. Computational Statistics & Data Analysis, 20, 35 - 44

Mace, A. E. (1964): Sample Size Determination. Reinhold Publishing Company, New York

Manly, B. F. J. (1970): The Choice of a Wald Test on the Mean of a Normal Population. Biometrika, 57, 91 - 95

Mann, H. B., Whitney, D. R. (1947): On a Test whether One of Two Random Variables is Stochastically Larger than the Other. Ann. Math. Statist., 18, 50 - 60

Mann, N. R., Scheuer, E. M., Fertig, K. W. (1973): A New Goodness-of-Fit Test for the Two Parameter Weibull or Extreme-value Distribution with Unknown Parameters. Commun. Statist., 2, 383 - 400

Marcus, R., Peritz, E., Gabriel, K. R. (1976): On Closed Testing Procedures with Special Reference to Ordered Analysis of Variance. Biometrika, 63, 655 - 660.

Mariot, F. M. C. (1990): A Dictionary of Statistical Terms. J. Wiley & Sons, New York

Matthews, J. N. S. (1988): Recent Developments in Crossover Designs. Int. Statist. Rev., 56, 117 - 127

Maxwell, A. E. (1977): Multivariate Analysis in Behavioural Research. Monographs on Statist. and Appl. Probab., Chapman and Hall, London

McCullagh, P., Nelder, J.A. (1989): Generalized Linear Models. Monographs on Statist. and Appl. Probab. 37, Chapman and Hall, London-New York-Tokyo-Melbourne-Madras, 511 p.

Mengersen, K., Bofinger, E. (1988): Confidence Bounds and Selection of the t Best Populations. Commun. Statist. - Simula., 17, 927 - 945

Mudra, A. (1952): Einführung in die Methodik der Feldversuche. Hirzel, Leipzig

Müller, P. H., Neumann, P., Storm, R. (1973): Tafeln der mathematischen Statistik. Fachbuchverlag, Leipzig

Newman, D. (1939): The Distributions of the Range in Samples from Normal Populations. Biometrika, 31, 20 - 30

Neyman, J., Scott, E. L. (1960): Correction for Bias Introduced by a Transform of Variables. Ann. Math. Statist., 31, 643 - 655

Nguyen, N. K., Williams, E. R. (1993a): An Algorithm for Constructing Optimal Resolvable Row-Column Design. Australian J. of Statist., 35, 363 - 370

Nguyen, N.-K., Williams, E. R. (1993b): Construction of Row-Column Designs by Computer. CSIRO-IAPP Biometrics Unit, Tech. Rep. 9353

Owen, D. B. (1968): Sbornik Statistitscheskich Tablizy. Vytschist. Zentr. AN SSSR, Moskau (engl. Handbook of Statistical Tables (1962), Addison Wesley, Reading, Mass.

Parzen, E. (1962): On Estimation of a Probability Density Function and Mode. Ann. Math. Statist., 33, 1065 - 1076

Paterson, L. J., Patterson, H. D. (1983): An Algorithm for Constructing α-Lattice Designs. Ars Combinatoria 16 A, 87 - 90

Paterson, L. J., Wild, P., Williams, E. R. (1988): An Algorithm to Generate Designs for Variety Trials. J. Agr. Sci., 111, 133 - 136

Rasch, D., Herrendörfer, G., Bock, J., Busch, K. (1981): Verfahrensbibliothek Versuchsplanung und -auswertung, Bd. 3. VEB Deutscher Landwirtschaftsverlag, Berlin

Rasch, D., Herrendörfer, G., Fethke, R. (1971): Tabellen zur Versuchsplanung. I. Stichprobenumfang für Mittelwertvergleiche nach dem u-Test für das Ein- und Zweistichprobenproblem (Approximativ auch für den t-Test geeignet). Unveröffentlicht (AdL)

Rasch, D., Schultz, J. (1979): Samples Sizes for Testing Equality of Location Parameters of Two Exponential Distributions. Biom. J., 21, 657 - 660

Rasch, D., Tiku, M. L., Sumpf, D. (Eds.) (1994): Elsevier's Dictionary of Biometry. Elsevier Science B.V., Amsterdam - London - New York - Tokyo

Rosenblatt, M. (1956): Remarks on Some Nonparametric Estimates of a Density Function. Ann. Math. Statist., 27, 832 - 837

Rosner, B. (1975): On the Detection of Many Outliers. Technometrics, 17, 221 - 227

Sachs, L. (1992): Angewandte Statistik. Anwendung statistischer Methoden. 7. völlig neu bearb. Auflage. Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo

Satterthwaite, F. E. (1946): An Approximate Distribution of Estimates of Variance Components. Biometrics, 2, 110 - 114

Scheffé, H. (1956): A "Mixed Model" for the Analysis of Variance. Ann. Math. Statist., 27, 23-36

Schmidtke, J., Schneider, B. (1994): TRIQ - A PC-Program for Design and Analysis of Triangular Sequential Trials. in: Dutter, R. and Grossmann, W.: COMPSTAT 1994. Proceedings in Computational Statistics, Physica Verlag, Heidelberg, 201 - 206

Schneider, B. (1992): An Interactive Computer program for Design and Monotoring of Sequential Clinical Trials. In: Proc. of the 1992 (XV/th) International Biometric Conference, Hamilton, New Zealand, vol. 1, Invited papers

Schwartz, H. (1975): Stichprobenverfahren. Verlag Die Wirtschaft

Scott, D. W. (1979): On Optimal and Data-Based Histograms. Biometrika, 66, 605 - 610

Scott, D. W. (1992): Multivariate Density Estimation: Theory, Practice, and Visualization. John Wiley & Sons, New York

Searle, S. R. (1971): Linear Models. J. Wiley & Sons, New York

Searle, S. R. (1987): Linear Models for Unbalanced Data. John Wiley & Sons, New York

Seber, G. A. F. (1982): The Estimation of Animal Abundance and Related Parameters (2nd Edition). Charles Griffin & Company Ltd., London and High Wycombe

Seber, G. A. F. (1986): A Review of Estimating Animal Abundance. Biometrics, 42, 267 - 292

Shapiro, S. S., Wilk, M. B. (1965): An Analysis of Variance Test for Normality (Complete Samples). Biometrika, 52, 591 - 611

Shapiro, S. S., Wilk, M. B., Chen, H. J. (1968): A Comparative Study of Various Tests for Normality. J. Amer. Statist. Assn., 63, 1343 - 1372

Sheather, S. J., Jones, M. C (1991): A Reliable Data-Based Bandwidth Selection Method for Kernel Density Estimation. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B Metho., 53, 683 - 690

Silverman, B. W., Jones, M. C.: "E. Fix and J. L. Hodges (1989): An Important Contribution to Nonparametric Discriminant Analysis and Density Estimation. Commentary on Fix and Hodges (1951)". Int. Statist. Rev., 57, 233 - 247

Simonoff, J. S. (1984): A Comparison of Robust Methods and Detection of Outliers Techniques when Estimating a Location Parameter. Commun. Statist. - Theor. Meth. 13, 813 - 842

Simonoff, J. S. (1995): Smoothing Categorial Data. J. Statist. Plann. and Infer., 45, to appear

Simons, G. (1968): On the Cost of not Knowing the Variance when Making a Fixed Width Confidence Interval for the Mean. Ann. Math. Statist., 39, 1946 - 1952

Smirnov, N. W. (1944): Priblishenie Sakonov Raspredelenija Slutschajnych Velitschin po Empiritscheskim Dannym. Usp. Mathem. Nauk., 10, 179 - 206

Smirnov, N. W., Dunin-Barkovski, I. W. (1973): Mathematische Statistik in der Technik. VEB Dt. Verlag d. Wissenschaften, Berlin

Som, R. K. (1973): A Manual of Sampling Techniques. Heinemann, London

Sonnemann, E. (1982): Allgemeine Lösung multipler Testprobleme. EDV in Medizin und Biologie, 13, 120-128

Speed, T. P., Williams, E. R., Patterson, H. D. (1985): A Note on Resolvable Incomplete Block Designs. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B Metho., 47, 357 - 361

Spurrier, J. D., Nizam, A. (1990): Sample Size Allocation for Simultaneous Inference in Comparison with Control Experiments. JASA, 85, 181 - 186

Stein, Ch. (1945): A Two Sample Test for a Linear Hypothesis whose Power is Independent of the Variance. Ann. Math. Statist., 16, 243 - 258

Störmer, H. (1970): Mathematische Theorie der Zuverlässigkeit. Einführung und Anwendungen. Akademie-Verlag, Berlin

Storm, R. (1969): Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Statistik und statistische Qualitätskontrolle. Fachbuchverlag, Leipzig, 3. Aufl.

Street, A. P., Street, D. J. (1987): Combinatorics of Experimental Design. Clarendon Press, Oxford

Subrahmanian, K. (1965): A Note on Estimation in the Truncated Poisson Distribution. Biometrika, 52, 279-281

Sukhatme, P. V., Sukhatme, B. V. (1970): Sampling Theory of Surveys with Applications. Iowa State University Press

Sumpf, D. (1986): Korrelationsmaße bei rangkategorialen Schwellenmerkmalen. Probleme der angewandten Statistik (Herausgegeben vom Forschungszentrum für Tierproduktion Dummerstorf-Rostock der AdL der DDR), 125 S.

Tate, R. F., Goen, R. L. (1958): Minimum Variance Unbiased Estimation for the Truncated Poisson Distribution. Ann. Math. Statist., 29, 755 - 765

Tenenbein, A. (1971): A Double Sampling Scheme for Estimating from Binomial Data with Misclassifications: Sample Size Determination. Biometrics, 27, 935 - 944

Tenenbein, A. (1974): Sample Size Determination for the Regressions Estimate of the Mean. Biometrics, 30, 709 - 716

Terrell, G. R., Scott, D. W. (1985): Oversmoothed Nonparametric Density Estimates. J. Amer. Statist. Assn., 80

Wald, A. (1943): An Extension of Wilk's Method for Setting Tolerance Limits. Ann. Math. Statist., 14, 45 - 55

Wand, M. P., Jones, M. C. (1995): Kernel Smoothing. Chapman and Hall, London

Wand, M. P., Marron, J. S., Ruppert, D. (1991): Transformations in Density Estimation (with Discussion). J. Amer. Statist. Assoc., 86, 343 - 361

Weiss, S. (1969): Planung, Durchführung und Auswertung balancierter Beobachtungsexperimente unter besonderer Berücksichtigung von Changeover-Experimenten mit einigen Beispielen aus der experimentellen Absatzforschung. Physika-Verlag, Würzburg

Weissberg, A., Beatty, G. H. (1960): Tables of Tolerance-Limit Factors of Normal Distributions. Technometrics, 2, 483 - 500

Welch, B. L. (1947): The Generalization of Student's Problem when Several Different Population Variances are Involved. Biometrika, 34, 28 - 35

Wetzel, W., Jöhnke, M. D., Naeve, P. (1967): Statistische Tabellen. Walter de Gruyter & Co., Berlin

Whitehead, J. (1992): The Design and Analysis of Sequential Clinical Trials. Ellis Horwood, New York

Wilcoxon, F. (1945): Individual Comparisons by Ranking Methods. Biometrics, 1, 80 - 82

Wilcoxon, F. (1947): Probability Tables for Individual Comparisons by Ranking Methods. Biometrics, 3, 119 - 122

Wilks, S. S. (1941): Determination of Sample Sizes for Setting Tolerance Limits. Ann. Math. Statist., 12, 91 - 96

Williams, D. A. (1972): The Comparison of Several Dose Levels with a Zero Dose Control. Biometrics, 28, 519 - 531

Williams, E. R., Matheson, A. C. (1994): Experimental Design and Analysis for Use in Tree Improvement. CSIRO, Melbourne

Williams, E. R., Patterson, H. D. (1977): Upper Bounds for Efficiency Factors in Block Designs. Australian J. of Statist., 19, 194 - 201

Wu, C. F. J., Chen, Y. (1992): A Graph-Aided Method for Planning Two-Level Experiments when Certain Interactions are Important. Technometrics, 34, 162 - 175

Yates, F. (1940): The Recovery of Interblock Information in Balanced Incomplete Block Designs. Annals of Eugenics, 10, 317 - 325

Yates, F. (1970): The Formation of Latin Squares for Use in Field Experiments. Empire J. of Exp. Agriculture, 1 (1933), 235 - 244. Nachdruck in Experimental Design: Selected Papers of F. Yates, Griffin London, (1970), 57 - 68